Μαθημα 16º 8/5/2017

Τοπολογια

Παραδειγμα

① $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ πληρης μ.χ , $S = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ πληρες υποσυνολο του $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow (\mathbb{Z}, |\cdot|_{\mathbb{Z}})$ πληρες μ.χ

Ισχυρισμος

$\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ κλειστο $\subseteq \mathbb{R}$) → ανοιχτο ως ενωση ανοιχτων

$\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ανοιχτο , $\mathbb{R}-\mathbb{Z} = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{(n, n+1)}_{=a_n}$ => $\mathbb{Z}$ κλειστο $\subseteq \mathbb{R}$

και $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ πληρες συνεπως και $\mathbb{Z}$ πληρες

② $S = \mathbb{Q} \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$ ειναι πληρες (?) $\subseteq \mathbb{R}$
$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \neq \mathbb{Q} \Rightarrow \overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q}$ οχι κλειστο $\subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$
$\mathbb{Q}$ οχι πληρες

③ (E, ρ) διακριτος μ.χ , $E \neq \emptyset \Rightarrow (E, \rho)$ πληρες
Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασικη στο E
Θδο $\exists\, \ell \in E : a_n \longrightarrow \ell$
$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ $\underbrace{\rho(a_n, a_m)}_{=0} < 1$, $\forall n, m \geq n_0$
$a_n = a_m \ \forall n, m \geq n_0$

④ (E, ρ) πληρης $\Leftrightarrow \forall (K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $K_{n+1} \subseteq K_n$
$K_n \neq \emptyset$ κλειστο $\subseteq E$, $\delta(K_n) \to 0$ $\Rightarrow \bigcap K_n \neq \emptyset$

Ισχυρισμος

$(\Rightarrow)$ $\bigcap K_n$ μονοσυνολο

Ας υποθεσουμε οτι $\exists\, a, b \in \bigcap K_n$ με $a \neq b \Rightarrow a, b \in K_n \ \forall n$
$0 \leq \rho(a,b) \leq \delta(K_n)$, $\delta(K_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ αρα $\rho(a,b) = 0 \Rightarrow a = b$

αν είναι πλήρες $\Rightarrow$ κλειστό $\subseteq \mathbb{R}$

Άσκηση

Υπάρχουν δύο μ.χ (E_1,ρ_1), (E_2,ρ_2) ομοιομορφικοί ώστε ο (E_1,ρ_1) πλήρης ενώ ο (E_2,ρ_2) όχι

ομοιομορφικοί

$\exists f \quad E_1 \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} E_2$, f και f^{-1} συνεχείς

$f(x) = \dfrac{x}{1+|x|} \Rightarrow |f(x)| \leq 1$

$f : \underbrace{(\mathbb{R}, |\cdot|)}_{=(E_1,\rho_1)} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} ((-1,1), |\cdot|)$

Αν $(-1,1)$ πλήρες $\subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \underbrace{\overline{(-1,1)}}_{=[-1,1]} = (-1,1)$ άρα $(-1,1)$ όχι πλήρες

Πρόταση (Συνθήκη Lipschitz)

Θα δίνεται (E,ρ) πλήρης μ.χ και $f:(E,\rho)\to(E,\rho)$ και $\vartheta \in [0,1)$: $\rho(f(x),f(y)) \leq \vartheta\,\rho(x,y) \quad \forall x,y \in E$

f συστολή $(\vartheta<1) \Rightarrow$ Η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο

Απόδειξη

$a \in E$, θα λέγεται σταθερό σημείο της f : $f(a)=a$

1º βήμα : $\exists$ 2 σταθ. σημείο a,b με $a\neq b$ $\quad f(a)=a$ και $f(b)=b$

Δεν μπορώ να έχω 2 σταθερά σημεία γιατί

$x=a$ και $y=b \Rightarrow \rho(a,b) \leq \vartheta\,\rho(a,b) \Rightarrow \rho(a,b)=0 \Rightarrow a=b$

με $\vartheta<1$

Σταθεροποιούμε ένα τυχαίο $x_0 \in E$, φτιάχνουμε μια ακολουθία ξεκινώντας από το x_0, με τη βοήθεια της f

$x_0,\ x_1=f(x_0),\ x_2=f(x_1),\ \dots,\ x_{n+1}=f(x_n)$

Δηλ. $x_0,\ f(x_0),\ f(f(x_0)),\ f(f(f(x_0))),\ \dots,\ f^{(n)}(x_0) = (\underbrace{f\circ\dots\circ f}_{n\text{-φορές}})(x_0)$

Scanned by CamScanner

Θδο η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική στο (E,ρ) (*)

Αν ισχύει η (*) τότε $\exists\, \ell \in E : x_n \longrightarrow \ell$

ισχυρισμός $f(\ell)=\ell$ (δηλ. σταθ. σημείο)

$x_{n+1}=f(x_n)$ αυτό είναι το βασικό

εφόσον $x_n \to \ell$ τότε $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(\ell)=\ell$

και $x_{n+1} \longrightarrow \ell$ (υποακολ. άρα συγκλίνει στο ίδιο)

Συνεπώς το ℓ αυτό είναι μοναδικό

Θα δείξουμε τη βασικότητα

$x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ με $f(x_n)=x_{n+1}$

Ξεκινώ με $\varepsilon>0$: $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon \quad \forall\, n,m \geq n_0(\varepsilon)$

$\rho(x_{n+1},x_n)$ για $n=1$: $\rho(x_2,x_1)=\rho(f(x_1),f(x_0)) \leq \vartheta\,\rho(x_1,x_0)$

$n=2$: $\rho(x_3,x_2) \leq \rho(f(x_2),f(x_1)) \leq \vartheta\,\rho(x_2,x_1) \leq \vartheta^2\rho(x_1,x_0)$

$\vdots$

$\rho(x_{n+1},x_n) \leq \vartheta^n\rho(x_1,x_0)$ επαγωγικά

Ισχύει $\rho(x_{n+1},x_n) \leq \vartheta^n\rho(x_1,x_0)$ (1)

$\forall\, m,n\ (m<n)$: $\rho(x_{n+1},x_n) \leq \rho(x_m,x_{m+1})+\rho(x_{m+1},x_{m+2})+\dots+$

$$+\rho(x_{n-1},x_n) \overset{(1)}{\leq} \vartheta^m\rho(x_1,x_0)+\vartheta^{m+1}\rho(x_1,x_0)+\dots+\vartheta^{n-1}\rho(x_1,x_0)=$$

$$=\vartheta^m\rho(x_1,x_0)\left[1+\vartheta+\dots+\vartheta^{n-1-m}\right] \leq \vartheta^m\rho(x_1,x_0)\sum_{j=0}^{+\infty}\vartheta^j$$

Δείξαμε δηλ.

$$\forall\, m,n \quad \rho(x_m,x_n) \leq \frac{\vartheta^m}{1-\vartheta}\rho(x_1,x_0)$$

$$\frac{\rho(x_1,x_0)}{1-\vartheta}=A_{x_0,\vartheta}\equiv A \quad , \rho(x_m,x_n) \leq \vartheta^m\cdot A \quad m<n \quad (2)$$

$\vartheta\in[0,1) \Rightarrow 0\leq\vartheta<1$ οπότε $\vartheta^n \to 0$ για $n\to\infty$ (1')

αν $\varepsilon>0$ $\exists\, n_1$: $\vartheta^n<\varepsilon/A$, $\forall\, n\geq n_1$

χωρις βλαβη της γενικοτητας

αν $A=0$ $\Rightarrow$ $\rho(x_1,x_0)=0$ $\Rightarrow$ $x_1=f(x_0)=x_0$

αρα χβγ $A>0$

Αν $n_0 \le m < n$ τοτε ② $\Rightarrow$ $\rho(x_m,x_n) < \varepsilon$ $\forall\, m \le n$

και βεβαια αν $n_0 \le n < m$: $\rho(x_n,x_m) \le \varepsilon$

Τοτε (x_n) βασικη

Δειξαμε δηλ. οτι $\rho(x_m,x_n) \le \dfrac{\rho(x_1,x_0)}{1-\vartheta}\cdot \vartheta^m$ ②

$$\left\{\begin{array}{l} x_n \xrightarrow{\rho} \ell \;\; , \; \rho(x_n,\ell)\to 0 \\ |\rho(a,x_n)-\rho(a,\ell)| \le \rho(a,\ell)+\rho(x_n,\ell) = \rho(x_n,\ell) \to 0 \\ \quad \rho(a,x_n) \to \rho(a,\ell) \; : \; x_n \xrightarrow{\rho} \ell \end{array}\right\}$$

$\ell : x_n \longrightarrow \ell$

Σταθεροποιουμε την ② στο m και αφηνουμε το $n\to\infty$

$\underbrace{\rho(x_m,\ell)}_{\to 0} \le \dfrac{\rho(x_1,x_0)}{1-\vartheta}\cdot \vartheta^m$

Ασκηση (απλη)

Δινεται το $I=[a,b]$ και $f: I\to I$ παραγωγισιμη στο (a,b) και συνεχης στο I ετσι ωστε $|f'(x)| \le \vartheta < 1$ $\forall\, x\in(a,b)$

Δειξτε οτι η εξισωση $f(x)=x$ εχει μοναδικη λυση στο $[a,b]$

Εστω $x,y\in[a,b]$ με $x<y$

$|f(y)-f(x)| = |f'(\xi)|\,|y-x| \le \vartheta\,|x-y|$ $\forall\, \xi\in(x,y)$

Προταση

Δινεται $f:(E,\rho)\to(E,\rho)$ με (E,ρ) πληρες

και $m\in\mathbb{N}$ ωστε $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{m-\text{φορες}}=g_m$ να ειναι συστολη

$\Rightarrow\exists$ μοναδικο σταθ. σημειο της f

Αποδειξη

Απ προηγ. θεωρημα $\exists$ μοναδικο σταθ σημειο της g_m

Εστω $a\in E : g_m(a)=a$

f συστολη $\Rightarrow$ $f\circ f$ συστολη , $\rho(f\circ f(x), f\circ f(y))=\rho(f(f(x)), f(f(y)))$

$\overset{f\,\sigma\upsilon\nu}{\leq}\vartheta\,\rho(f(x),f(y))\leq\vartheta^2\rho(x,y)$, $\vartheta^2<1$

$g_m=f\circ f\circ\ldots\circ f:(E,\rho)\to(E,\rho)$ συστολη

$\Rightarrow\exists$ μοναδικο σταθ. σημειο g_m. Εστω $a\in E$ με $g_m(a)=a$

ΘΔΟ η f εχει μον. σταθ σημειο το a

i) $f(a)=a$

ii) Αν $b\in E : f(b)=b\Rightarrow b=a$

Αποδ μεσα στην αποδ.

i) αρκει $f(a)$ σταθ. σημειο

$\underbrace{g_m(f(a))}_{\leq f(a)\ (1)}=(\underbrace{f\circ\ldots\circ f}_{m-\text{φορες}})(f(a))=(\underbrace{f\circ\ldots\circ f}_{m+1\ \text{φορες}})(a)=f((f\circ\ldots\circ f)(a))=$

$=f(g_m(a))=f(a)\Rightarrow (1)$

ii) Αν $b\in E : f(b)=b\Rightarrow b=a$

Εχουμε οτι το a ειναι το μοναδ. σταθ. σημειο

της g_m αρκει για να προκυψει $b=a$

ΘΔΟ $g_m(b)=b\Rightarrow b=a$

$g_m(b)=(f\circ\ldots\circ f)(b)=(f\circ\ldots\circ f)(f(b))=(f\circ\ldots\circ f)=(b)=\ldots=b$

συγκλίνουσα σε μετρ. χώρο $\Rightarrow$ βασική

f συστολή $\theta<1 \Rightarrow$ μον. σταθ. σημείο

$\exists\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x+1$

$|f(x)-f(y)| \leq |x-y|$ αλλά η f δεν έχει σταθ. σημείο

$f:(E_1,\rho_1) \to (E_2,\rho_2)$ ομοιόμορφα συνεχής

$(a_n)_n \subseteq E_1$, $(a_n)_n$ βασική $(E_1,\rho_1) \Rightarrow (f(a_n))_n$ βασική

στον (E_2,ρ_2)

Απόδειξη

Αρκεί $\forall \varepsilon>0 : \exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\rho_2(f(a_n), f(a_m)) < \varepsilon$ $\forall n,m \geq n_0$ (2)

Έστω $\varepsilon>0$, f ομοιομ. συνεχής $\Rightarrow \exists \delta>0$ $\delta=\delta(\varepsilon)$

$\forall x_1, x_2 \in E_1$ με $\rho_1(x_1,x_2)<\delta \Rightarrow \rho_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ (1)

Αν είχαμε $\rho_1(a_n,a_m)<\delta$ (3) $\forall n,m \geq n_0$ για κάποιο n_0

$\xRightarrow[\text{λόγω (1)}]{}$ (2)

Αν εφαρμόσω ορισμούς βασικότητας της $(a_n)_n \subseteq E_1$

για $\varepsilon=\delta \Rightarrow \exists n_0(\delta)$ (3) αληθής $\Rightarrow$ συστολή

Αν f απλώς συν. δεν έχουμε το ίδιο συμπέρασμα

$\exists\ f:(E_1,\rho_1) \to (E_2,\rho_2)$ συνεχής

$\exists\ (a_n)_n$ βασική στον E_1 τ.ω. $(f(a_n))_n$ όχι βασική

στον (E_2,ρ_2)

$f:(0,+\infty) \to (0,+\infty)$ με $f(x)=1/x$ όχι ομοιομ. συνεχής

$(a_n)_n$ βασική στο $(0,+\infty)$

Διαλέγω $a_n=\frac{1}{n}$ βασική στο $(0,+\infty)$

$b_n=f(a_n)=n$ στο $(0,+\infty)$, $|b_n-b_m| \leq \varepsilon$

Αν f απλώς συν. δεν έχουμε ίδιο συμπέρασμα.

$b_n > n \in (0,+\infty)$ $\forall n \in \mathbb{N}$